

Bericht Nr. 3048

Numerische Untersuchung eines Überholvorgangs in beschränktem Wasser

Potsdam, Dezember 2004



**Numerische Untersuchung
eines Überholvorgangs in beschränktem Wasser**

Auftraggeber: Bundesstelle für Seeunfalluntersuchung
Bernhard-Nocht-Str. 78
20359 Hamburg
Tel. (040) 31 90 - 0, Fax (040) 31 90 - 83 40

Auftragnehmer: Schiffbau-Versuchsanstalt Potsdam GmbH
Marquardter Chaussee 100
14469 Potsdam
Tel. (0331) 567 12 0, Fax (0331) 567 12 49

SVA-Auftrag Nr.: 3893

Bearbeiter: Dr.-Ing. A. Cura Hochbaum
Dipl.-Ing. F. Conrad
Dipl.-Ing. L. Lübke
Dipl.-Ing. M. Steinwand

Dieser Bericht enthält: 16 Blatt Text
3 Tabellen
25 Bilder

Potsdam, den 17.12.2004

Geschäftsführung

Bearbeiter

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	4
2. Aufgabenstellung	4
3. Vorgehensweise	5
4. Kräfte und Momente auf das überholte Schiff	8
5. Einzustellende Ruderwinkel und dazugehörige Driftwinkel	12
6. Zusammenfassung der Ergebnisse	15
7. Literatur	16
ANHANG A	17
ANHANG B	25
ANHANG C	26

Abbildungsverzeichnis

	Seite
1 Skizze des Querschnittes des Berechnungsgebiets	5
2 Propeller- und Ruderanordnung der P&O Nedlloyd Finland	7
3 Längskraft, Seitenkraft und Giermoment auf das überholte Schiff	9
4 Schiffsabsenkung und Vertrimmung am überholten Schiff	10
5 Wellenbild bei Längsversatz -0.4 L	10
6 Giermoment auf das überholte Schiff im Tiefwasser	11
7 Längskraft am überholten Schiff, mittlere und feine Gitterauflösung	11
8 Ruderwinkel und Driftwinkel am überholten Schiff	13
9 Axialgeschwindigkeit in zwei Spantquerschnitten	14
10 Druckverteilung auf Rumpf und Ruder	14
11- 17 Wellenbilder für alle sieben Fälle ohne Böschung	17 - 20
18- 24 Wellenbilder für alle sieben Fälle mit Böschung	21 - 24
25 Geschwindigkeitsverlauf der P&O Nedlloyd Finland	25

Im Auftrag der Bundesstelle für Seeunfalluntersuchung (BSU) hat die Schiffbau-Versuchsanstalt Potsdam (SVA) eine numerische Studie über einen Überholvorgang in beschränktem Wasser durchgeführt. Dabei wurden für sieben stationär betrachtete Situationen die Kräfte und das Giermoment, die bei dem Überholvorgang auf das überholte Schiff ausgeübt werden, berechnet. Darüber hinaus wurden jeweils der Ruderwinkel und der sich ergebende Driftwinkel bestimmt die zur Einhaltung der gradlinigen Trajektorie nötig sind.

1. Einleitung

Wenn Schiffe sich in geringem Abstand voneinander bewegen, beeinflussen sich die jeweiligen Strömungsfelder gegenseitig. Dabei können erhebliche hydrodynamische Kräfte und Momente entstehen, die die Steuerbarkeit der Schiffe beeinträchtigen und zu Kollisionen führen können. Dies stellt insbesondere im Flachwasser bei kleinem Verhältnis h/T zwischen Wassertiefe und Tiefgang eine größere Gefahr dar. Die wichtigsten Gründe für Kollisionen während eines Überholvorgangs sind ein zu geringer Abstand zwischen den beteiligten Schiffen und eine zu hohe Schiffsgeschwindigkeit, weil dadurch die erwähnten Kräfte und Momente zunehmen, sowie ein zu geringer Geschwindigkeitsunterschied, weil dadurch der Überholvorgang länger dauert und diese Kräfte und Momente sich auswirken können.

Die wichtigste Ursache für die Seitenkraft ist der Sog, der wegen der Beschleunigung der Strömung und Absenkung des Druckes zwischen beiden Schiffen entsteht. Eine weitere Ursache für die Seitenkraft ist der Tragflügeleffekt, der dazu führt, dass hauptsächlich das jeweils vordere Schiff eine Kraft erfährt, die entgegen dem anderen Schiff gerichtet ist.

Bei Überholvorgängen mit kleinen Abständen zwischen den betroffenen Schiffen spielt die Wellenbildung eine geringe Rolle, verglichen mit der starken Störung des Druckfeldes zwischen beiden Schiffen. Anders jedoch in unserem Fall, wo der Seitenabstand der Schiffe etwa vier Schiffsbreiten des großen Schiffes beträgt. Die Störung des Druckfeldes zwischen beiden Schiffen ist in diesem Fall viel moderater, so dass die langsam abklingenden Wellen eine größere Rolle spielen können.

Da der Geschwindigkeitsunterschied meist gering ist und die Vorgänge lange dauern, können üblicherweise bei Überholvorgängen, im Gegensatz zu Begegnungsvorgängen, instationäre Effekte vernachlässigt werden. Dann ist eine quasistationäre Betrachtung des Vorgangs angebracht.

2. Aufgabenstellung

Aufgrund der geringen Geschwindigkeitsdifferenz der beiden Schiffe während des untersuchten Überholvorgangs kann die Strömung als quasistationär betrachtet werden. Bei den Berechnungen fahren beide Schiffe auf parallelem Kurs mit der gleichen Geschwindigkeit von $V = 15 \text{ Kn}$. Für einen seitlichen Abstand von 150 m zwischen den Schiffsmittellinien sollen in Längsrichtung fünf Positionen der beiden Schiffe zueinander untersucht werden (-0.2, 0, 0.3, 0.6 und 0.8 L, wobei L die Länge des überholenden Schiffes ist). Der Längsversatz ist Null, wenn die vorderen Lote beider Schiffe auf gleicher Höhe sind. Ein positiver Längsversatz bedeutet, dass sich der Bug des überholenden Schiffes vor dem des überholten Schiffes befindet. Außerdem sollen für den Längsversatz bei dem das betragsmäßig größte Giermoment auf das überholte Schiff ausgeübt wird, die seitlichen Abstände 100 m und 200 m untersucht werden.

3. Vorgehensweise

Die Kräfte und Momente am überholten Schiff lassen sich durch Berechnung der Strömung um beide Schiffe bestimmen. Hierfür wird das von Söding (TUHH) für die SVA Potsdam entwickelte potentialtheoretische Berechnungsverfahren KELVIN ([1]-[3]) eingesetzt. Dabei werden der Flachwassereinfluss, die Wellenbildung, sowie die dynamische Absenkung und Vertrimmung der beteiligten Schiffe berücksichtigt. Bei der Untersuchung ist es nicht erforderlich das Ruder des überholenden Schiffes zu berücksichtigen. Das Ruder des überholten Schiffes ist für die Bestimmung des Giermomentes von Bedeutung und wird als Flosse (ohne Dicke) modelliert.

Nach der Potentialtheorie wird die Strömung um die Schiffe als inkompressibel und rotationsfrei angenommen. Daher braucht nur die Massenerhaltungsgleichung, in Form einer Laplace-Gleichung für das Geschwindigkeitspotential, zusammen mit der kinematischen und der dynamischen Randbedingung an der freien Wasseroberfläche gelöst werden. Das Verfahren benutzt dafür die nichtlineare Rankine-Quell-Methode, d.h. die Randbedingungen an der Wasseroberfläche werden iterativ an Kollokationspunkten erfüllt, die auf der verformten Wasseroberfläche liegen. Dazu werden Punktquellen oberhalb der Wasseroberfläche angeordnet. Die Körper-Randbedingung wird nach der Patch-Methode ([1]) erfüllt, d.h. es werden Punktquellen innerhalb des Rumpfes jeweils mittig hinter den Oberflächenstücken (Patches) angeordnet. Die Quellstärke wird so bestimmt, dass der Durchfluss durch alle Oberflächenstücke verschwindet. Das resultierende nichtlineare Gleichungssystem in den Quellstärken aller Punktquellen wird iterativ gelöst. Um Konvergenz und Genauigkeitsprobleme zu vermeiden, wird in KELVIN zu jeder neu iterierten Schwimmlage und Wellenkontur automatisch das Berechnungsgitter bzw. die Patch-Einteilung der benetzten Schiffsoberfläche und der Wasseroberfläche generiert. Für Details über das benutzte Verfahren KELVIN, siehe Anhang C.

Bei den Berechnungen wurde der Flussboden näherungsweise berücksichtigt, Abbildung 1. Die dafür erforderliche Information wurde seitens der Versuchsanstalt Duisburg (DTS) bereitgestellt. Die Lateralränder des Berechnungsgebiets stellen offene Ränder dar. Die Ausdehnung des Gitters auf der Wasseroberfläche in Längsrichtung beträgt 4 Schiffslängen des überholenden Schiffes. Da sich das überholte Schiff bei allen Berechnungen in der Mitte des Berechnungsgebiets befindet, ist durch die gewählte Ausdehnung gewährleistet, dass sich auch in der hintersten und in der vordersten Position des überholenden Schiffes genügend Gitterzellen hinter bzw. vor diesem befinden.

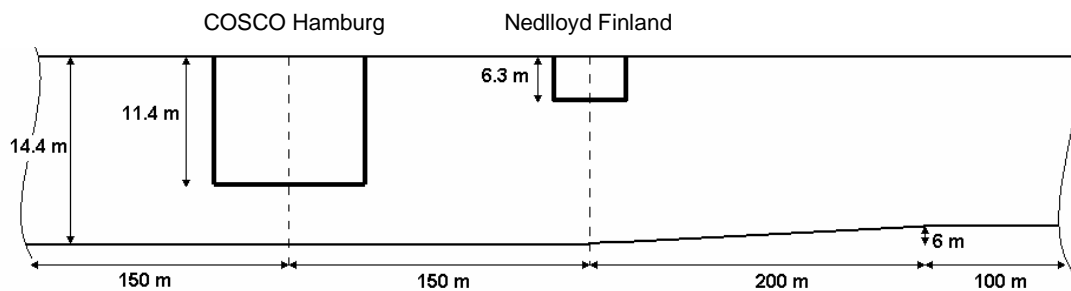


Abb.1 Skizze des Querschnittes des Berechnungsgebiets

Im Gegensatz zu einer Berechnung der viskosen Strömung mit einem RANSE-Löser (durch Lösung der "*Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations*") wird bei den KELVIN Berechnungen der Tragflügeleffekt nicht erfasst. Dies dürfte nur in der Annäherungsphase einen nennenswerten Einfluss auf die berechnete Seitenkraft und das Giermoment am überholten Schiff ausüben. Die in dieser Phase (kleine) abstoßende Seitenkraft wäre bei Berücksichtigung des Tragflügeleffektes etwas größer, das Giermoment vermutlich etwas kleiner. KELVIN wird zurzeit um die Berücksichtigung des Tragflügeleffektes ergänzt, so dass bei zukünftigen Studien dies eventuell berücksichtigt werden kann. Dies erscheint insbesondere für die Untersuchung von stark instationären Fällen (z.B. Begegnungsvorgängen) von größerer Bedeutung.

Da nur von der COSCO Hamburg eine digitalisierte Schiffsformbeschreibung vorlag bzw. von der DST zur Verfügung gestellt wurde, die P&O Nedlloyd Finland jedoch nur als Linienriss vorhanden war, erfolgte zuerst die Digitalisierung der P&O Nedlloyd Finland. Die so erstellten IGES-Daten wurden wiederum der DST zur Verfügung gestellt. Mittels der IGES-Daten wurden im Anschluss Berechnungsgitter auf beiden Schiffsrümpfen erzeugt.

Zusätzlich zu den beauftragten o.g. sieben Fällen wurden zahlreiche Berechnungen durchgeführt, um die Qualität der Ergebnisse zu kontrollieren. So wurden beispielsweise auch Berechnungen für beide Schiffe im Tiefwasser und für die P&O Nedlloyd Finland allein im Tief- und Flachwasser durchgeführt. Alle Berechnungen wurden mit unterschiedlichen Gitterauflösungen wiederholt. Die feinste Gitterauflösung besaß 120x60 Zellen für die freie Wasseroberfläche. Ferner wurde der Einfluss des zum Ufer hin ansteigenden Bodens untersucht, indem Berechnungen mit und ohne Böschung verglichen wurden. Um den Verlauf der untersuchten Größen während des Überholmanövers beurteilen zu können wurden darüber hinaus zahlreiche zusätzliche Positionen des Überholers in Längsrichtung untersucht.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass alle Testrechnungen die erzielten Ergebnisse untermauern. Die berechneten Verläufe sind glatt und sehr plausibel. Der Einfluss der (sehr leichten) Steigung des Flussbodens zum Ufer hin auf die berechneten Kräfte und Momente am überholten Schiff ist klein aber nicht vernachlässigbar. Ab einer Auflösung von 90x45 Zellen, d.h. 90 Zellen in Längsrichtung und 45 Zellen in Querrichtung, zeigten die Ergebnisse der Kelvin Berechnungen keine nennenswerten Änderungen mehr.

Die mittels KELVIN quasistationär berechneten Werte für die Kräfte und das Giermoment auf das überholte Schiff (P&O Nedlloyd Finland) für die verschiedenen Situationen während des Überholvorgangs dienten im Anschluss zur Vorhersage des jeweils einzustellenden Ruderwinkels und des sich daraus ergebenden Driftwinkels, um das dynamische Gleichgewicht zur Einhaltung der gradlinigen Trajektorie zu erzielen. Dies erfolgte auf zwei verschiedenen Vorgehensweisen.

Die erste Vorgehensweise bestand darin mittels des Simulationsprogramms SIMBEL [4] Driftfahrten des zwangsgeführten Schiffes mit gelegtem Ruder für verschiedene Kombinationen von Drift- und Ruderwinkel zu simulieren und für jeden untersuchten Fall jeweils die Kombination zu ermitteln, die die zuvor berechnete Seitenkraft und das berechnete Giermoment ausgleichen. Zur Bestimmung der hydrodynamischen Kräfte und Momente am untersuchten Schiff benutzt SIMBEL ein nichtlineares Streifenverfahren in Verbindung mit einem Traglinienverfahren für die Kräfte am Ruder. Da beide Verfahren auf der Potentialtheorie basieren, werden empirische Korrekturen für viskose Effekte vorgenommen. Die Anströmgeschwindigkeit des Ruders wird unter Berücksichtigung des mit der berechneten Längskraft geschätzten Schubbelastungsgrades angesetzt.

Die zweite Vorgehensweise bestand darin, mit Hilfe von empirischen Formeln und Daten von ähnlichen Schiffen einen Satz von hydrodynamischen Koeffizienten zu bestimmen, die die Abhängigkeiten der Seitenkraft und des Giermoments vom Drift- und Ruderwinkel beschreiben.

Durch Gleichsetzung der mit diesen Koeffizienten gebildeten Ansätze für die Seitenkraft und das Giermoment mit den zuvor mit KELVIN berechneten Werten, lassen sich für jede betrachtete Situation der Ruderwinkel und der Driftwinkel bestimmen. Dabei hat es sich herausgestellt, dass (wegen der relativ kleinen resultierenden Werte für Drift- und Ruderwinkel) die Abhängigkeit von Koeffizienten höherer Ordnung vernachlässigbar ist und, dass auch Kopplungsterme (abhängig von beiden Winkeln) für die untersuchte Fragestellung keine bedeutende Rolle spielen. Daher müssen nur die linearen hydrodynamischen Koeffizienten Y_v , Y_δ , N_v , N_δ genau bestimmt werden.

Die Hauptdaten der bei dem untersuchten Überholvorgang beteiligten Schiffe, das Containerschiff "COSCO Hamburg" und das Feederschiff "P&O Nedlloyd Finland", sind in der Tabelle 1 zu finden. Abbildung 2 zeigt die Propeller- und Ruderanordnung des überholten Feederschiffes.

Tabelle 1: Schiffshauptdaten

		COSCO Hamburg	P&O Nedlloyd Finland
Länge zw. den Loten	L_{pp}	264.00 m	96.00 m
Länge über alles	L	280.00 m	101.00 m
Breite	B	39.90 m	18.40 m
Tiefgang vorne	T_v	11.30 m	6.00 m
Tiefgang hinten	T_h	11.50 m	6.57 m
Blockkoeffizient	C_B	0.59	0.652
Geschwindigkeit	V	15 Kn	15 Kn
Froudezahl	F_n	0.152	0.251
Tiefenfroudezahl	F_{nh}	0.64	0.64
Wassertiefe/Tiefgang	$h / (T_v + T_h)$	1.26	2.30

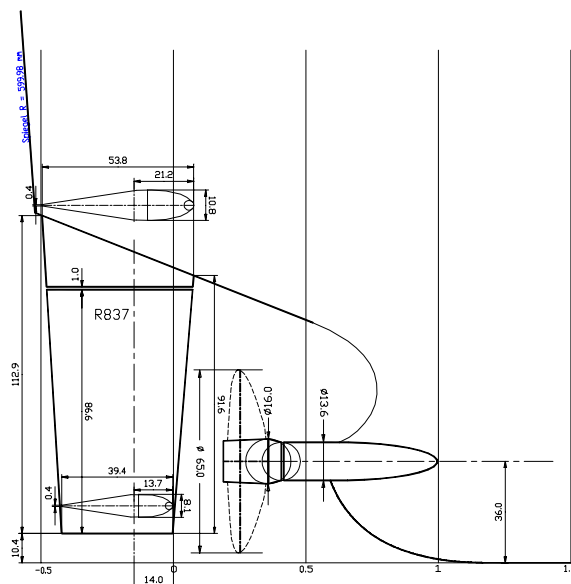


Abb.2 Propeller- und Ruderanordnung der P&O Nedlloyd Finland

4. Kräfte und Momente auf das überholte Schiff

Die mit KELVIN berechneten Kräfte und Giermomente am überholten Schiff bei einem seitlichen Abstand von 150 m sind in Abbildung 3 dargestellt. Als Abszisse wurde die Position bzw. der dimensionslose Längsversatz des überholenden Schiffes bezüglich des überholten Schiffes dargestellt. Als Referenzlänge wurde $L=280$ m benutzt. Der Längsversatz ist Null wenn beide vorderen Lote auf gleicher Höhe sind. Das benutzte Koordinatensystem am überholten Schiff hat seinen Ursprung am Hauptspant an der Wasserlinie. Die Längskoordinate x zeigt nach vorne, y nach Steuerbord und z , nach unten. Entsprechend sind die positiven Richtungen der Längskraft X , der Seitenkraft Y und des Giermomentes N definiert.

Das überholte Schiff erfährt bei 150 m Seitenabstand während des Überholvorgangs eine kleine Seitenkraft, die überwiegend zum passierenden Schiff gerichtet ist. Das Giermoment wechselt während des Vorgangs das Vorzeichen und nimmt etwa gleichgroße positive und negative Maximalwerte an. Während der Annäherungsphase erfährt das überholte Schiff ein Giermoment, das den eigenen Bug weg vom überholenden Schiff zu drehen versucht. Wenn beide Hauptspanten etwa nebeneinander liegen, verschwindet das Giermoment. Während der Entfernungsphase erfährt das überholte Schiff ein Giermoment, das den eigenen Bug hin zum überholenden Schiff zu drehen versucht. Die Längskomponente der Sogkraft am überholten Schiff wechselt während des Vorgangs ebenfalls das Vorzeichen. Dies ist deswegen tückisch, weil zunächst ein kurzer Überholvorgang vorgetäuscht wird, dann aber der Vorgang durch die Beschleunigung des überholten Schiffes stark verzögert wird. Wie in Abbildung 3 zu sehen ist, nimmt die Längskraft (der Widerstand) in der Entfernungsphase betragsmäßig deutlich kleinere Werte an. Auf Basis des berechneten Längskraftverlaufs lässt sich der Geschwindigkeitsverlauf der P&O Nedlloyd Finland während des Überholmanövers abschätzen, s. Anhang B.

Auch ohne Tragflügeleffekt nimmt die Seitenkraft, insbesondere in der Annäherungsphase, positive Werte an. Obwohl der Grund für diese (kleine) abstoßende Kraft auf das überholte Schiff nicht restlos geklärt werden konnte, ist dies vermutlich auf die Aufstauung der Strömung vor dem Überholer und die entsprechende Erhöhung des Druckes auf der Backbordseite des überholten Schiffes zurückzuführen. Abbildung 5 zeigt Isolinien der Wellenerhebung um beide Schiffe für den Längsversatz $-0.4 L$, d.h. kurz vor Beginn des Überholmanövers. Es wurden Isolinien zwischen $z=-1.2$ m und 1.2 m mit Abstand 0.10 m dargestellt.

In Abbildung 3 wurden auch die Verläufe für den Fall eines horizontalen Bodens bei $h/T=2.3$ als Annäherung an die reale Bodengeometrie gestrichelt dargestellt. Die Unterschiede zwischen diesen Ergebnissen und denen unter Berücksichtigung der Böschung (durchgezogene Linien) sind für den betrachteten Seitenabstand gering. Die leichte Asymmetrie des Querschnittes des Strömungsgebietes hat keinen großen Einfluss auf die Ergebnisse. Wie Testrechnungen zeigten, erfährt die Seitenkraft eine Erhöhung, die etwa dem Betrag der zum Ufer hin wirkenden Kraft auf das überholte Schiff in Abwesenheit des Überholers entspricht.

Die in Abbildung 4 dargestellten Verläufe der Absenkung und Vertrimmung des überholten Schiffes für verschiedene Positionen des Überholers zwischen $-0.5 L$ und $1 L$ bei dem Seitenabstand von 150 m zeigen eine etwas stärkere Veränderung der dynamischen Schwimmelage bei Berücksichtigung der Böschung. Unsere Testrechnungen für die P&O Nedlloyd alleine zeigten eine moderate Zunahme der Schiffsabsenkung von etwa 0.30 m auf 0.55 m für Tiefwasser bzw. für Flachwasser mit $h/T=2.30$. Dagegen variiert die Absenkung stark während des Überholmanövers und erreicht Werte um einen Meter. Die Vertrimmung bleibt dabei stets relativ klein.

Sowohl die Seitenkraft als auch das Giermoment nehmen im Flachwasser stark zu. Abbildung 6 zeigt beispielsweise den berechneten Verlauf des Giermomentes auf das überholte Schiff für den Überholvorgang im Tiefwasser. Die Maximalwerte sind hier eine Größenordnung kleiner als im untersuchten Fall, vgl. Abbildung 3.

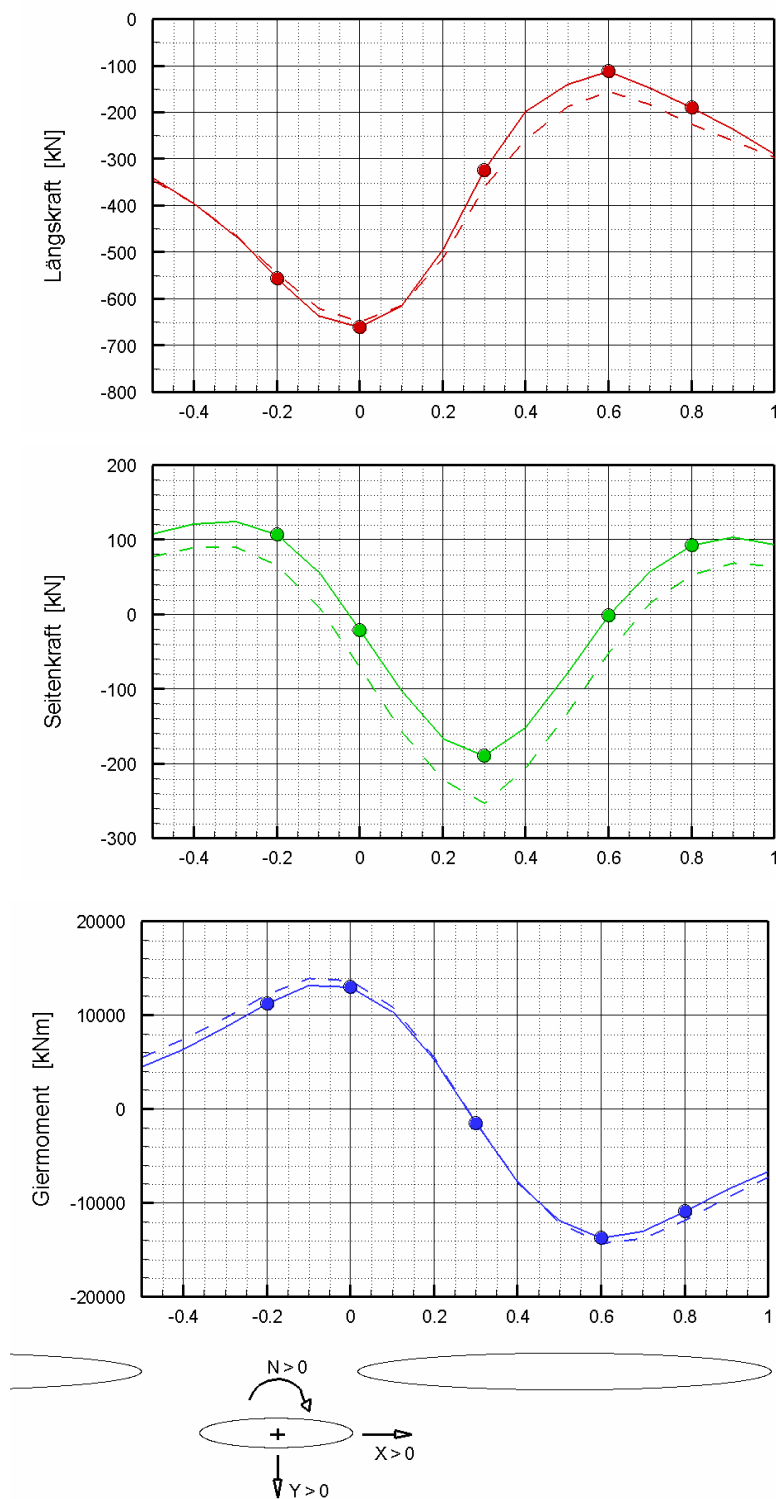


Abb. 3 Längskraft, Seitenkraft und Giermoment auf das überholte Schiff

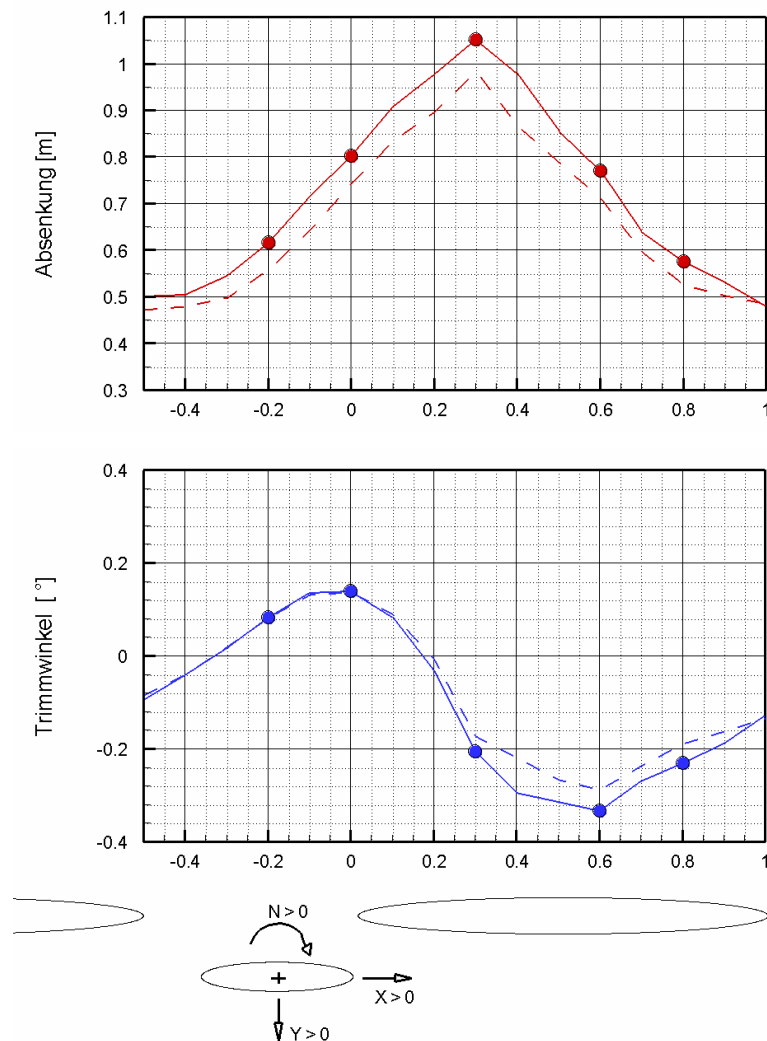


Abb. 4 Schiffsabsenkung und Vertrimmung am überholten Schiff

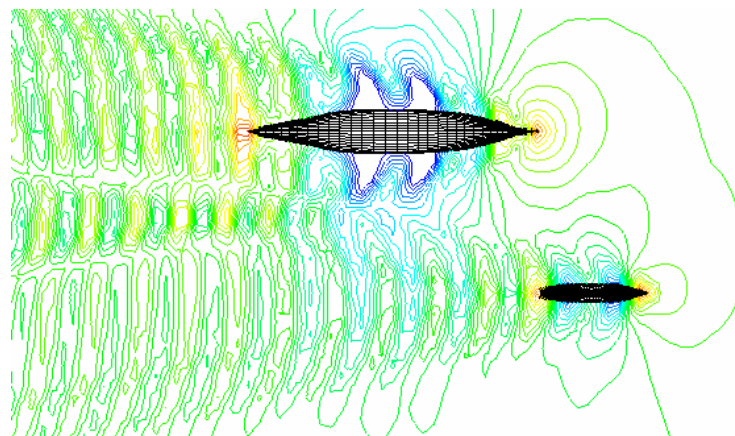


Abb. 5 Wellenbild bei Längsversatz -0.4 L

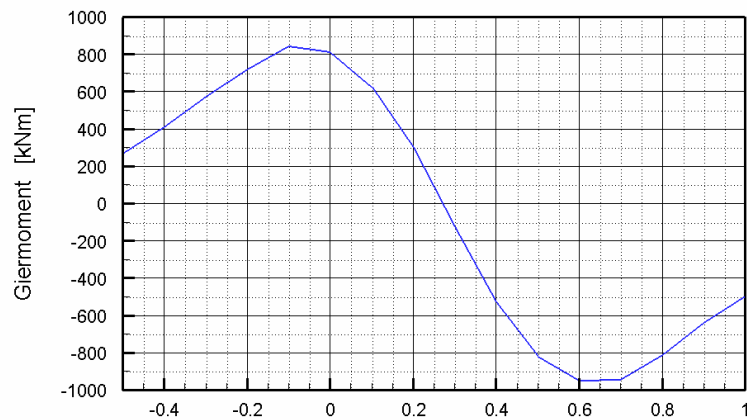


Abb. 6 Giermoment auf das überholte Schiff im Tiefwasser

Die Wiederholung der Berechnungen für alle interessierenden Fälle mit der höheren Auflösung von 120x60 Zellen auf dem Wasseroberflächengitter zeigte keine nennenswerte Änderung der Seitenkräfte und Giermomente. Lediglich bei der für die jetzige Fragestellung weniger relevanten Längskraft konnten Unterschiede festgestellt werden. In Abbildung 7 ist der Verlauf der Längskraft mit der mittleren (gestrichelt) und mit der feineren Auflösung (durchgezogen) dargestellt.

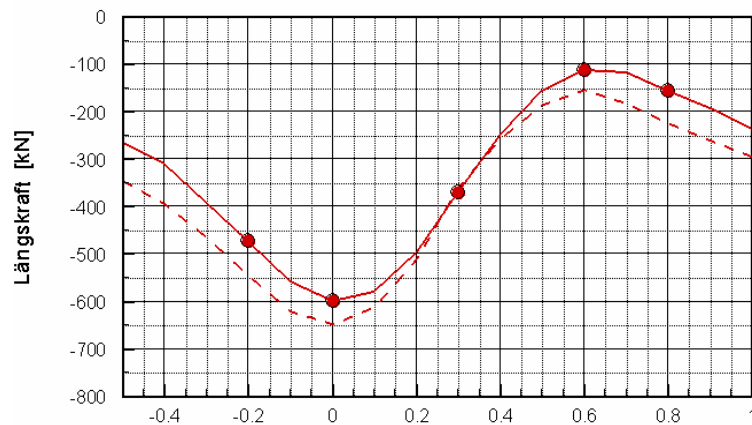


Abb. 7 Längskraft am überholten Schiff, mittlere und feine Gitterauflösung

In den Tabellen 2 und 3 sind die Ergebnisse mit und ohne Berücksichtigung der Böschung zusammengefasst. Die Ergebnisse der Berechnungen mit den Seitenabständen 100 und 200 m für den Längsversatz von 0.6 L, bei dem nach unseren Berechnungen das größte Giermoment auftritt, sind auch in den Tabellen angegeben. Erwartungsgemäß vergrößert sich das Giermoment auf das überholte Schiff stark beim Übergang von 200 auf 100 m. Dagegen ändert sich dabei die Seitenkraft kaum. Die Erklärung dafür dürfte sein, dass der Vorzeichenwechsel der Seitenkraft, der etwa bei dem Längsversatz 0.6 L stattfindet, wenig von dem betrachteten Abstand abhängt.

Die mit KELVIN berechneten Wellenbilder für die sieben untersuchten Fälle sind im ANHANG A in den Abbildungen 11 bis 24 dargestellt.

5. Einzustellende Ruderwinkel und dazugehörige Driftwinkel

Der zuverlässigste Weg den einzustellenden Ruderwinkel und den sich ergebenden Driftwinkel für jede betrachtete Situation zu bestimmen wäre die Berechnung der zähigkeitsbehaftete Strömung um das überholte Schiff im realen Maßstab für eine Variation von Driftwinkel und Ruderwinkel, unter Berücksichtigung der Wellenbildung, der realen Bodenbeschaffung und der entsprechenden Propellerbelastung. Da dies allerdings nicht in dieser Studie vorgesehen war, wurden zur Bestimmung der einzustellenden Ruderwinkel und dazugehörigen Driftwinkel am überholten Schiff zwei verschiedene konventionelle Strategien verfolgt, s. Abschnitt 2. Zur Verifikation der damit erzielten Ergebnisse wurden für einige ausgesuchte Fälle RANSE Berechnungen durchgeführt. Dabei hat sich der Weg über die hydrodynamische Koeffizienten als genauer erwiesen.

Die RANSE Berechnungen wurden für die Strömung um das Modell, statt um die Großausführung, und ohne Berücksichtigung der freien Wasseroberfläche durchgeführt, da sie hier nur Unterstützungscharakter hatten und sie so weniger aufwendig waren. Im Hinblick auf die Bestimmung des nötigen Ruderwinkels und entsprechenden Driftwinkels können aber Maßstabseffekte eine größere Rolle spielen als bei der Bestimmung der Seitenkraft und des Giermomentes auf das überholte Schiff. Dies ist in erster Linie auf die im Modell stark überzeichnete Grenzschicht und die stärkere Propellerbelastung zurückzuführen. Sollten sich diese zwei Effekte nicht gegenseitig aufheben, ergibt sich am Modell eine andere Ruderzuströmung als bei der Großausführung.

Die RANSE Simulationen wurden für verschiedene stationäre Driftfahrten bei mittigem und bei gelegtem Ruder durchgeführt. Die (axiale) Propellerwirkung wurde dabei durch Vorgabe einer Kraftverteilung in der Propellerebene (entsprechend dem Schub des Propellers) simuliert. Der Einfluss des Drehsinns des Propellers wurde nicht berücksichtigt, dürfte aber für die jetzige Fragestellung keine große Bedeutung haben. Die Abbildungen 9 und 10 zeigen repräsentativ einige globale Ergebnisse der durchgeführten Simulationen.

Im untersuchten Fall beträgt die Tiefenfroudezahl $F_{nh} = 0.64$, d.h. dass Flachwassereffekte noch nicht ausgeprägt sein dürften. Dennoch wurde dies bei der Bestimmung der Ruderwinkel und Driftwinkel über Korrekturen der hydrodynamischen Koeffizienten für Flachwasser berücksichtigt. Um diese nicht immer zuverlässigen empirischen Korrekturen zu prüfen wurden die RANSE Berechnungen sowohl für Tiefwasser als auch für den Fall einer Wassertiefenbegrenzung durch einen horizontalen Boden entsprechend dem Verhältnis $h/T=2.3$ durchgeführt und zur Erstellung des Koeffizientensatzes herangezogen. Da es sich herausstellte, dass die linearen hydrodynamischen Koeffizienten für die Vorhersage des Ruderwinkels und des Driftwinkels ausreichen, wurden schließlich für diesen Zweck die mit RANSE bestimmten hydrodynamischen Koeffizienten benutzt.

Die berechneten Ruderwinkel und Driftwinkel für die 7 untersuchten Situationen sind in den letzten zwei Spalten in Tabellen 2 und 3 eingetragen. Abbildung 8 zeigt den berechneten Ruderwinkel und den sich ergebenden Driftwinkel am überholten Schiff für verschiedene Positionen des Überholers zwischen $-0.5 L$ und $1 L$ bei dem Seitenabstand von $150 m$. Die Berechnungen unter Berücksichtigung der Böschung (durchgezogen) ergaben auch hier nur wenig veränderte Ergebnisse verglichen mit den Berechnungen mit dem horizontalen Boden bei $h/T=2.30$ (gestrichelt). Insgesamt waren relativ kleine Ruderwinkel erforderlich um die zuvor berechneten Seitenkräfte und Giermomente auszugleichen.

Die bei den begleitenden Berechnungen für Tiefwasser resultierenden Werte für Ruder- und Driftwinkel fielen etwas größer aus als für den betrachteten Fall beschränkten Wassers. Die Drehfähigkeit und die Steuerbarkeit des Schiffes nehmen im Flachwasser meist stark ab, weil die Ruderwirkung insgesamt abnimmt. Letzteres ist darauf zurückzuführen, dass die Rumpfkkräfte relativ viel stärker zunehmen als die Ruderkraft. Dagegen nehmen aber die Gierstabilität und die Andrehfähigkeit des Schiffes im Flachwasser zu, was dem Kurshaltevermögen zu Gute kommt.

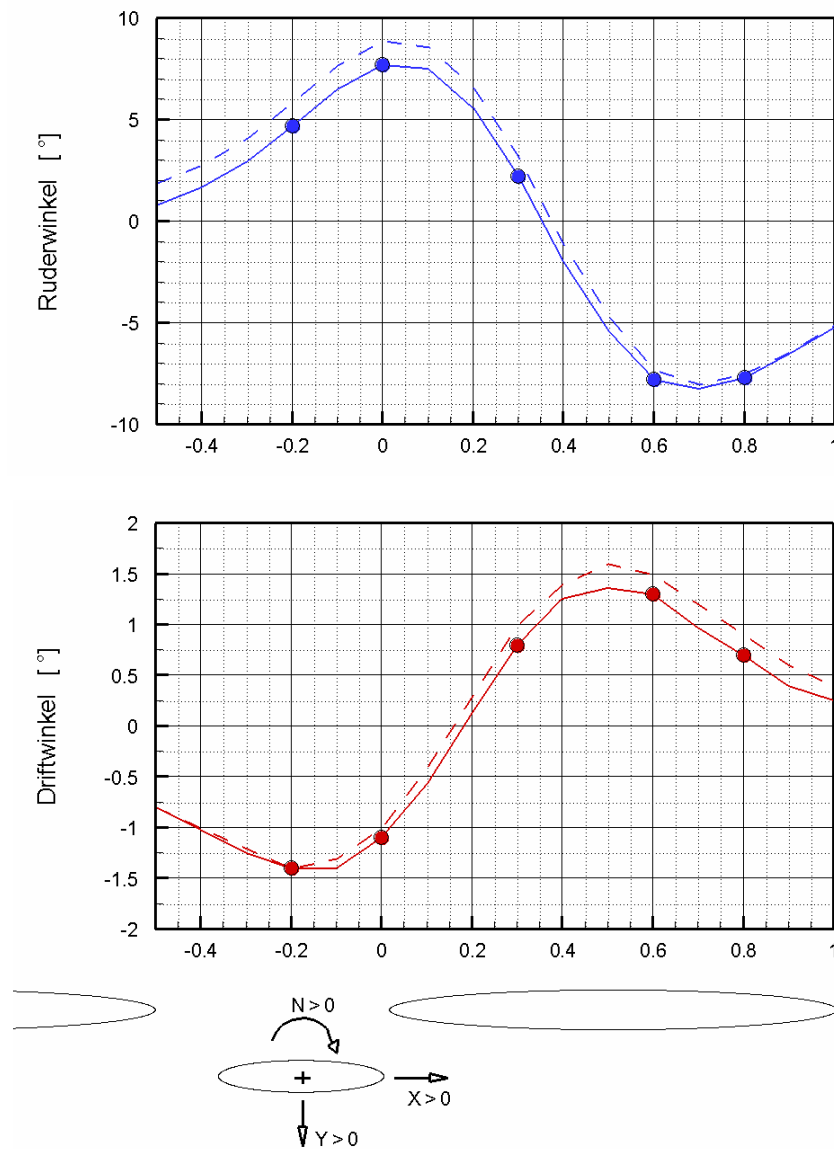


Abb. 8 Ruderwinkel und Driftwinkel am überholten Schiff

Nedlloyd Finland bei Driftfahrt (10° S tb) mit gelegtem Ruder (10° Stb)

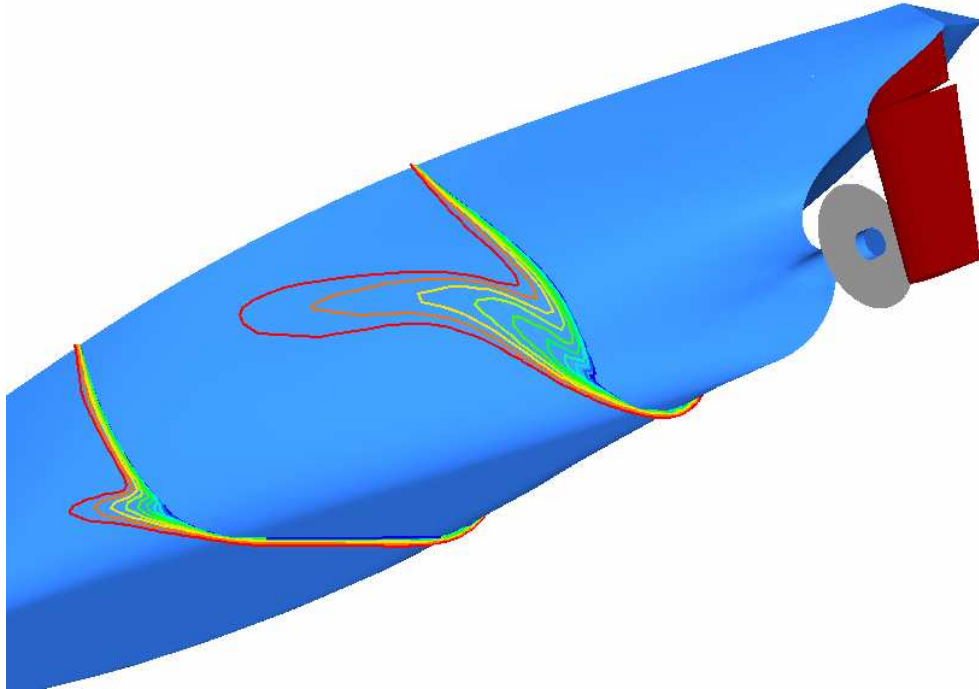


Abb. 9 Isolinien der Axialgeschwindigkeit in zwei Spantquerschnitten. Propeller als Aktuator

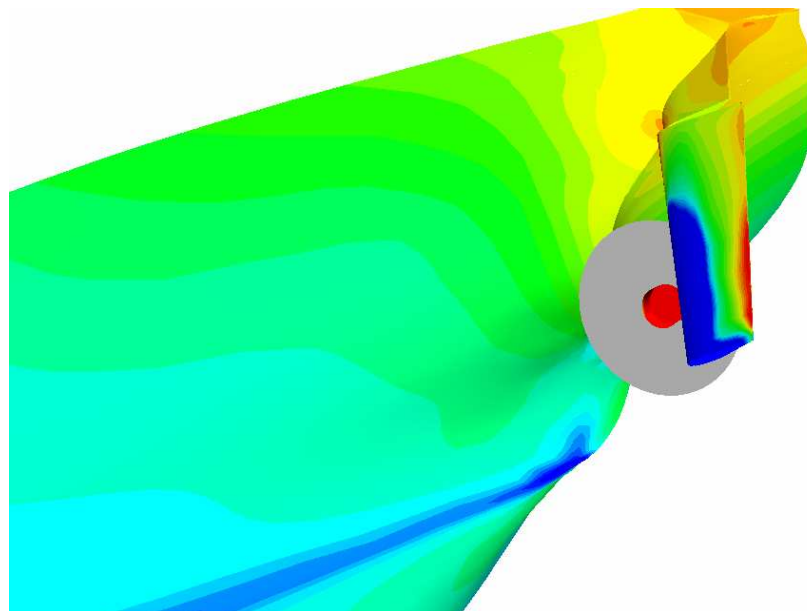


Abb.10 Druckverteilung auf Rumpf und Ruder

6. Zusammenfassung der Ergebnisse

Für den vorwiegend untersuchten Seitenabstand von 150 m sind nur kleine Ruderwinkel erforderlich um die Trajektorie zu halten. Allerdings ändert sich der nötige Ruderwinkel stark mit dem Längsversatz zwischen überholendem und überholtem Schiff. Die sich ergebenden Driftwinkel sind sehr klein. Nur für den Fall mit dem Seitenabstand von 100 m ergaben sich etwas größere Ruderwinkel. Grund für diese kleinen Winkel ist der relativ große Seitenabstand zwischen den beteiligten Schiffen, die moderate Schiffsgeschwindigkeit und das nicht extreme Flachwasserverhältnis im untersuchten Fall.

Durch den beschränkten Umfang des Auftrages konnten in dieser Studie nicht alle Aspekte des Überholvorgangs untersucht werden. Insbesondere zur Herleitung von einzuhaltenden Kriterien für Mindestabstände, Maximalgeschwindigkeit und Geschwindigkeitsdifferenz wäre eine umfangreichere Parametervariation erforderlich. Diese Untersuchungen sollten auf Basis von RANSE durchgeführt werden und eventuell auch instationäre Effekte berücksichtigen.

Tabelle 2: Ergebnisse der 7 untersuchten Fälle, horizontaler Boden bei $h/T=2.3$

x/L	a [m]	X [kN]	Y [kN]	N [kNm]	ΔT [m]	θ [°]	δ [°]	β [°]
-0.2	150	-546	66	12307	0.56	0.083	5.9	-1.4
0.	"	-648	-71	13680	0.744	0.138	8.9	-1.0
0.3	"	-358	-252	-1429	0.985	-0.172	3.2	1.0
0.6	"	-154	-50	-14243	0.712	-0.286	-7.2	1.5
0.8	"	-225	54	-11805	0.526	-0.188	-7.5	0.9
0.6	100	55	-43	-24724	0.750	-0.471	-13.3	2.4
0.6	200	-256	-42	-8497	0.654	-0.183	-4.1	0.9

Tabelle 3: Ergebnisse der 7 untersuchten Fälle, Boden mit Böschung

x/L	a [m]	X [kN]	Y [kN]	N [kNm]	ΔT [m]	θ [°]	δ [°]	β [°]
-0.2	150	-556	107	11279	0.617	0.084	4.7	-1.4
0.	"	-660	-21	12968	0.803	0.140	7.7	-1.1
0.3	"	-324	-189	-1499	1.053	-0.205	2.2	0.8
0.6	"	-111	-1	-13756	0.770	-0.332	-7.8	1.3
0.8	"	-190	93	-10921	0.576	-0.230	-7.7	0.7
0.6	100	116	10	-23912	0.816	-0.534	-13.7	2.1
0.6	200	-224	2	-8133	0.725	-0.227	-4.7	0.7

7. Literatur

- [1] Söding, H.:
A method for accurate force calculations in potential flow
Ship Techn. Res. (1993) 40/4, 176-186
- [2] Söding, H.:
Das Wellenwiderstands-Programmsystem Kelvin
unveröffentlicht, 1996.
- [3] SVA Potsdam:
Kelvin – Pressure and velocity distribution
8th SVA – Forum, SVA Report No.2582, 23.3.2000
- [4] Pereira, R. und Schumann, C.:
Programmbeschreibung UTHLANDE, Nichtlineare Streifenmethode SIMBEL
JAFO Technologie Hamburg, Juli 2003

ANHANG A

Berechnete Isolinien der Wellenerhebung zwischen -1.2 m und 1.2 m mit Abstand 0.10 m
Horizontaler Boden bei $h/T=0.23$

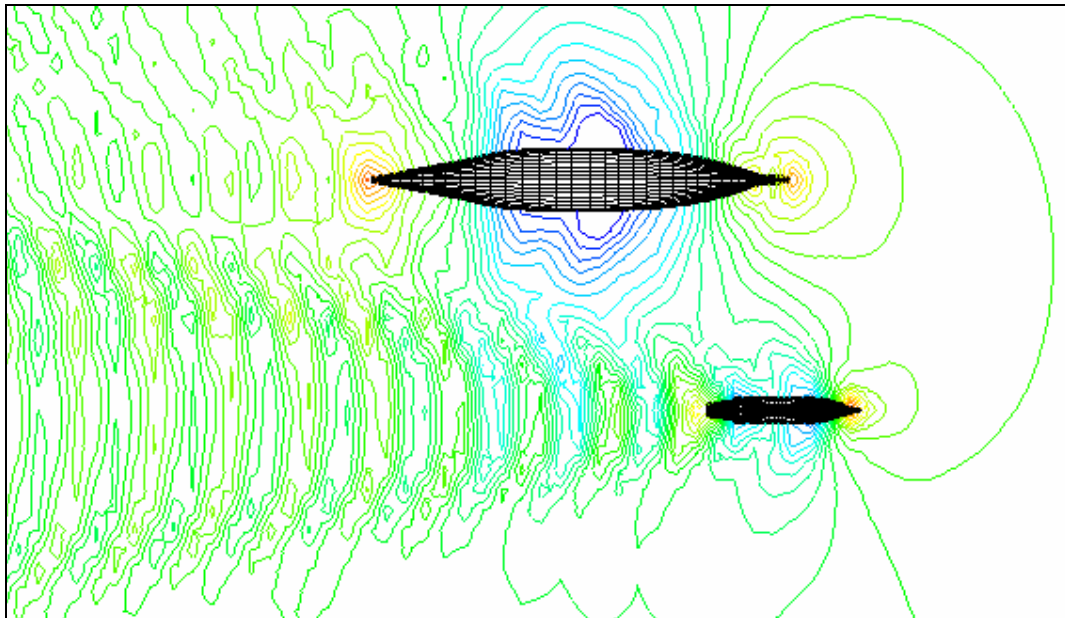


Abb. 11 Längsversatz $-0.2 L$, Seitenabstand 150 m

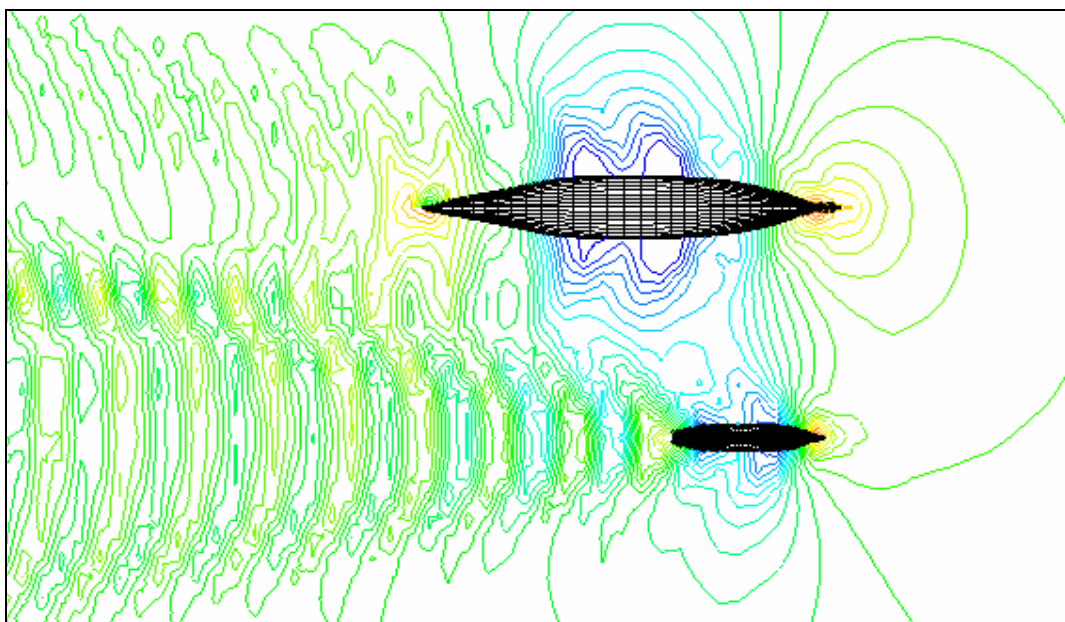


Abb. 12 Längsversatz 0, Seitenabstand 150 m

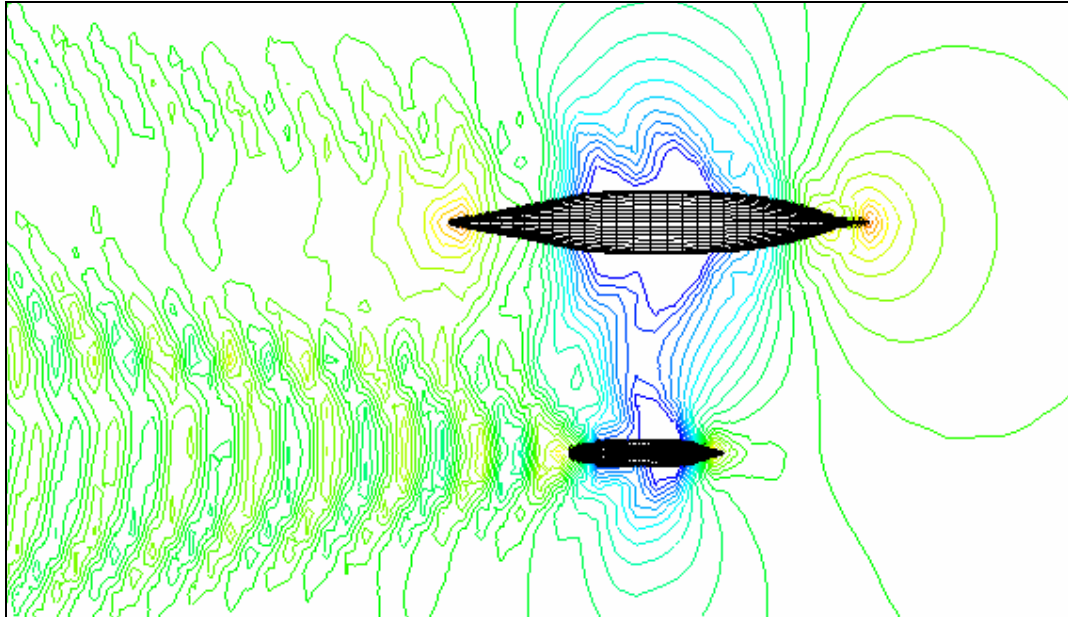


Abb. 13 Längsversatz 0.3 L, Seitenabstand 150 m

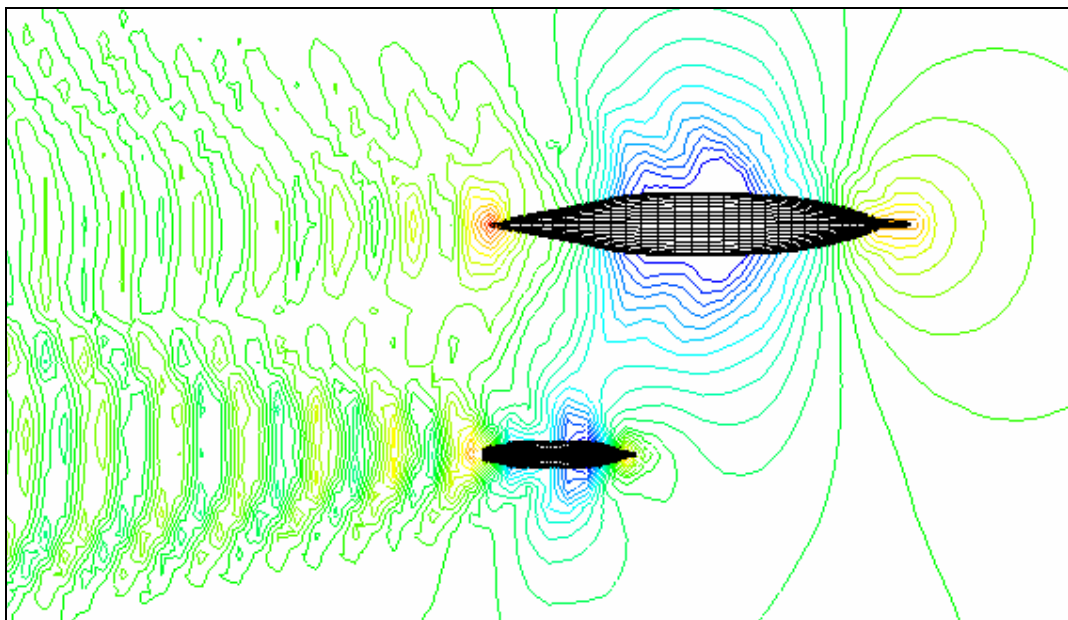


Abb. 14 Längsversatz 0.6 L, Seitenabstand 150 m

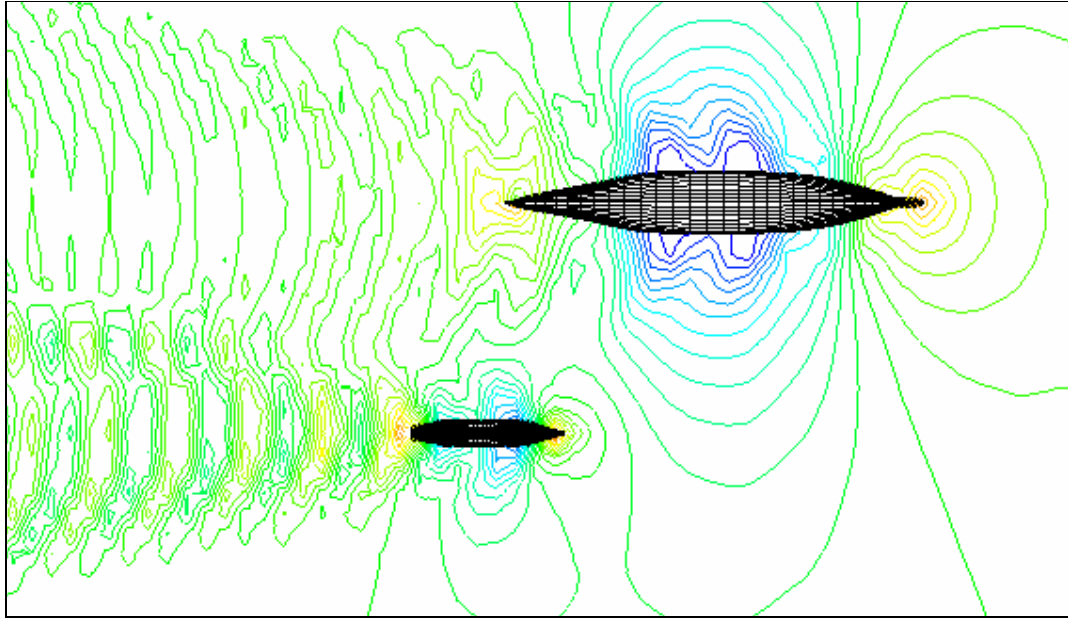


Abb. 15 Längsversatz 0.8 L, Seitenabstand 150 m

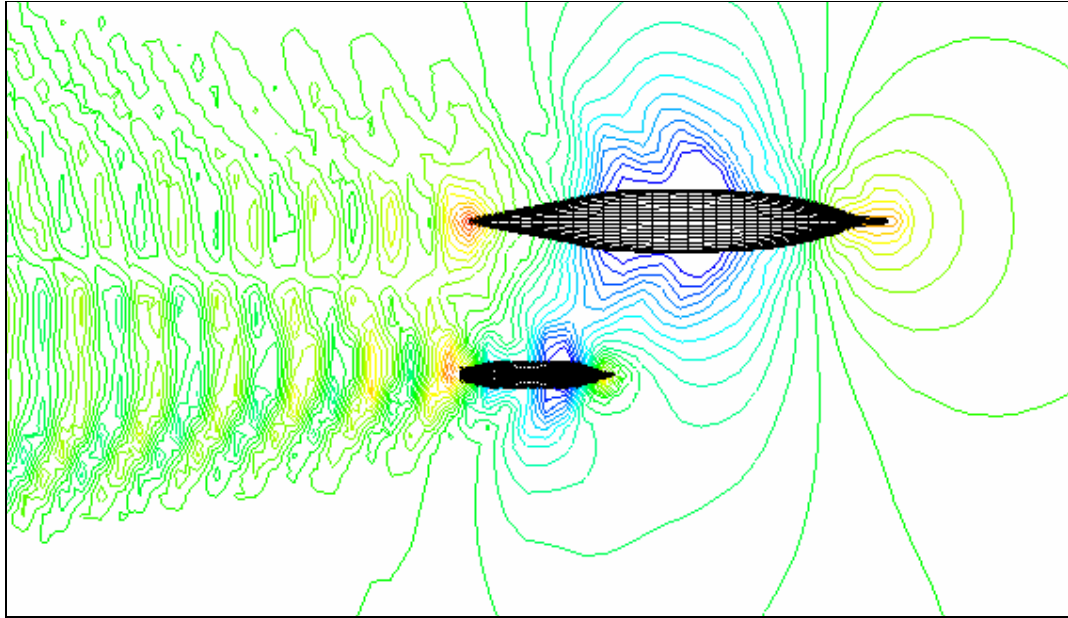


Abb. 16 Längsversatz 0.6 L, Seitenabstand 100 m

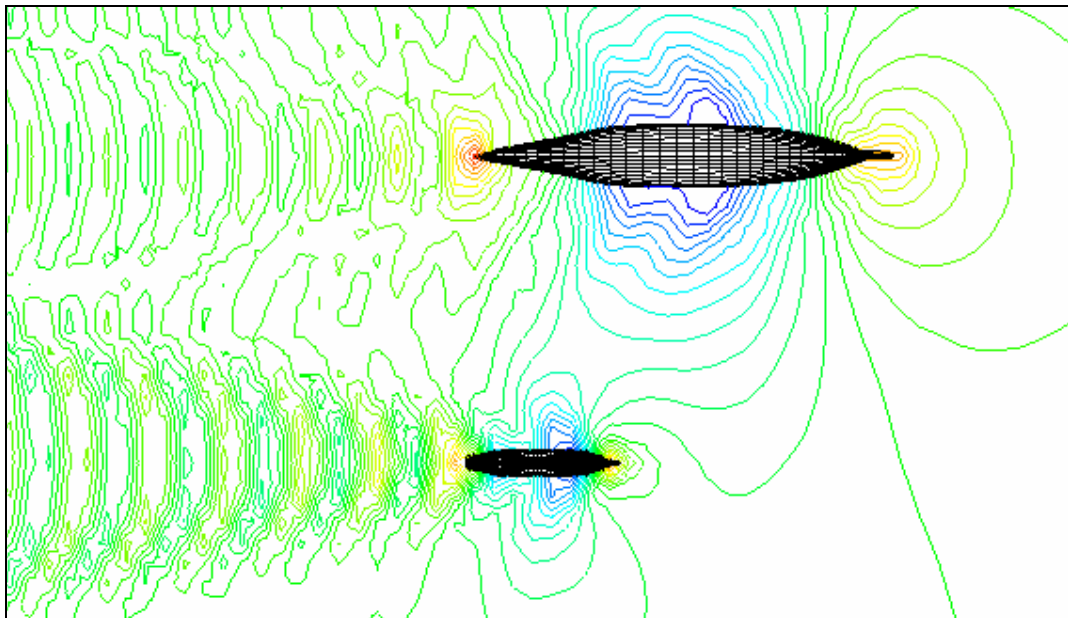


Abb. 17 Längsversatz 0.6 L, Seitenabstand 200 m

Berechnete Isolinien der Wellenerhebung zwischen -1.2 m und 1.2 m mit Abstand 0.10 m
Boden mit Böschung

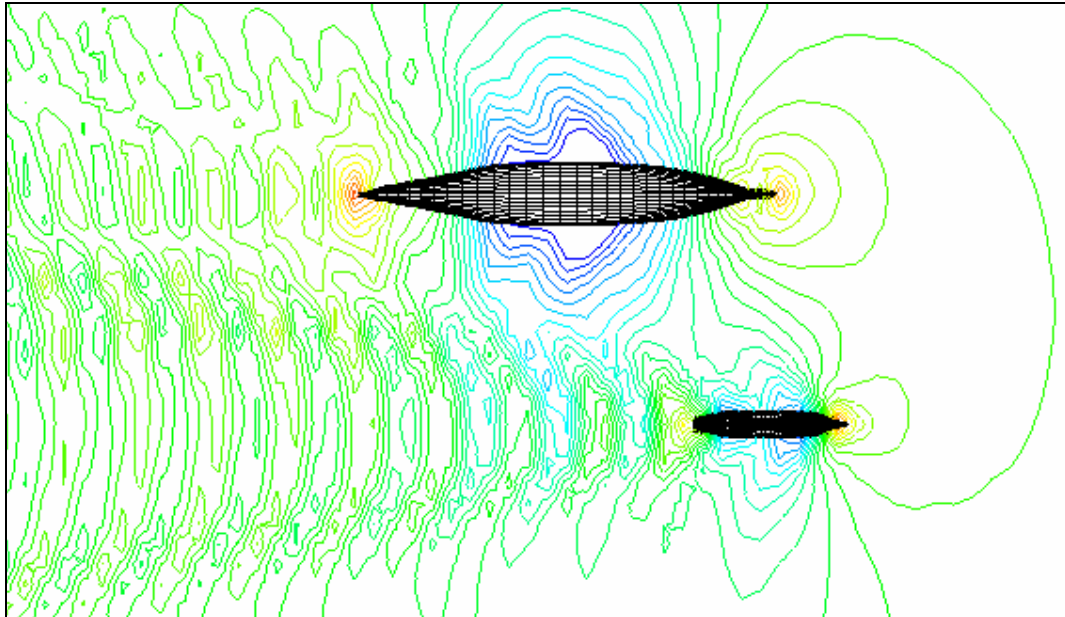


Abb. 18 Längsversatz -0.2 L, Seitenabstand 150 m

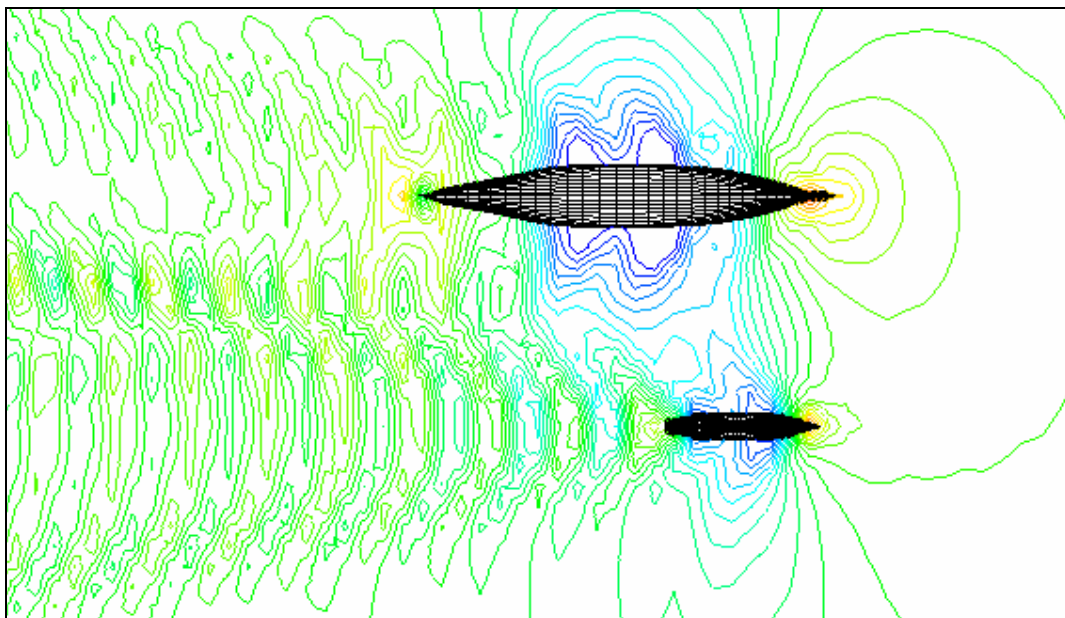


Abb. 19 Längsversatz 0, Seitenabstand 150 m

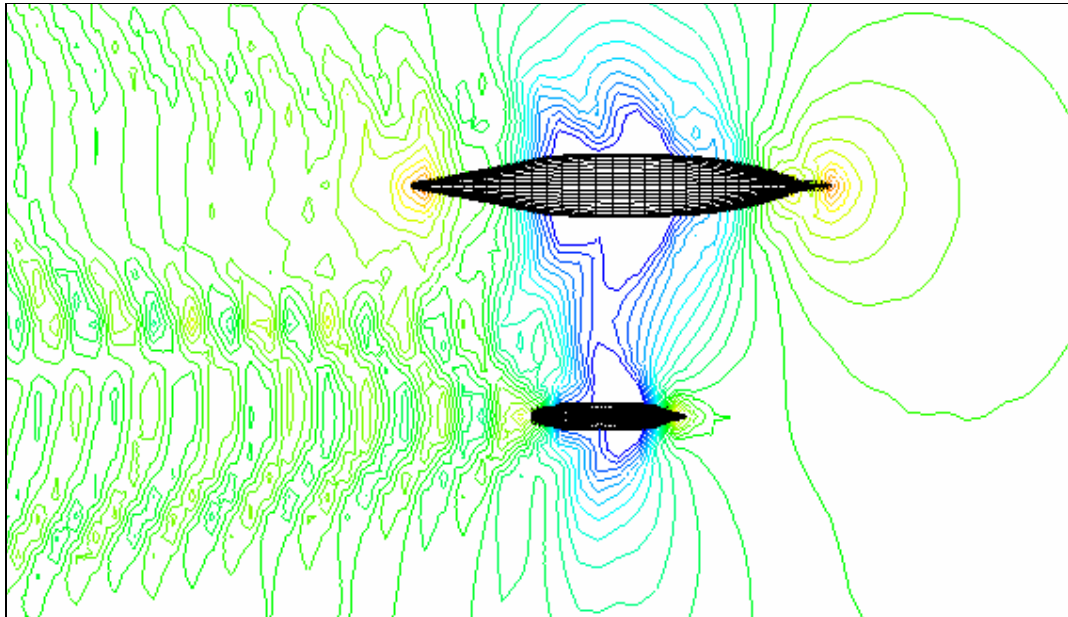


Abb. 20 Längsversatz 0.3 L, Seitenabstand 150 m

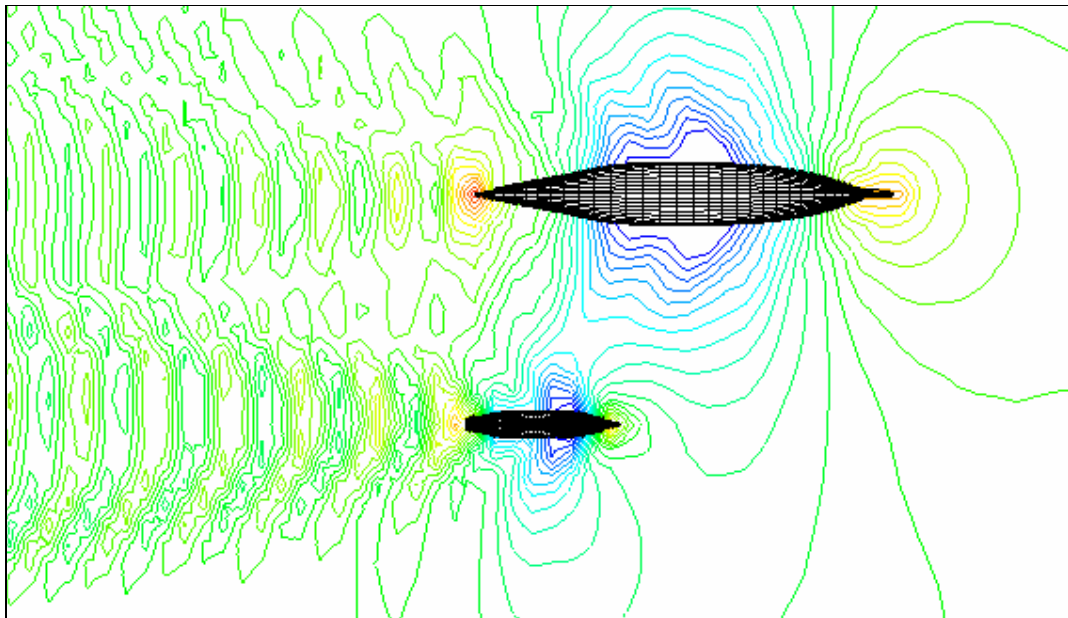


Abb. 21 Längsversatz 0.6 L, Seitenabstand 150 m

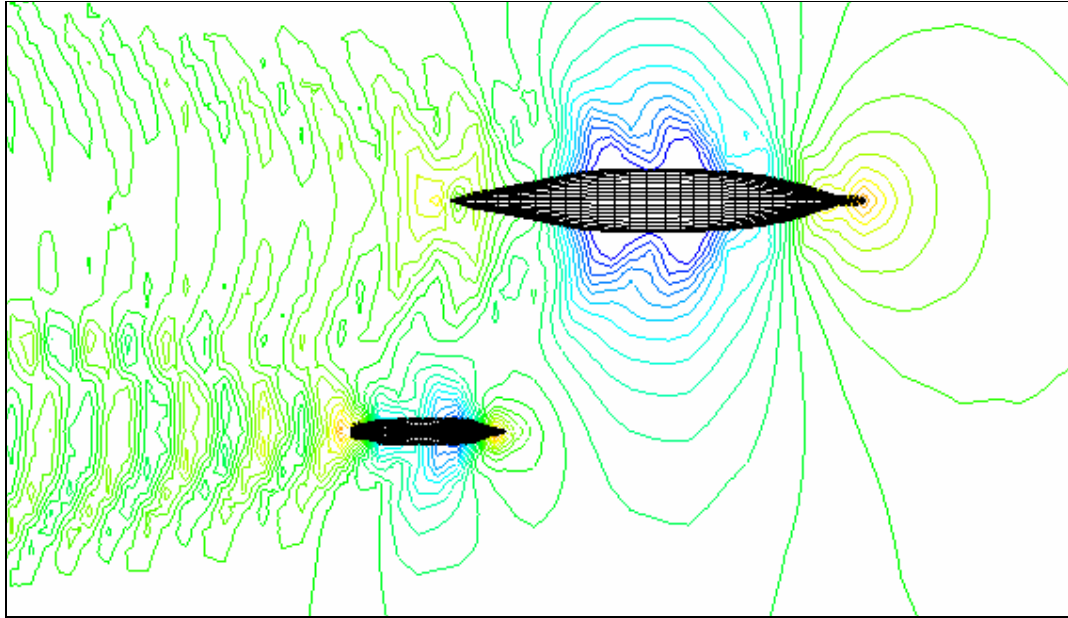


Abb. 22 Längsversatz 0.8 L, Seitenabstand 150 m

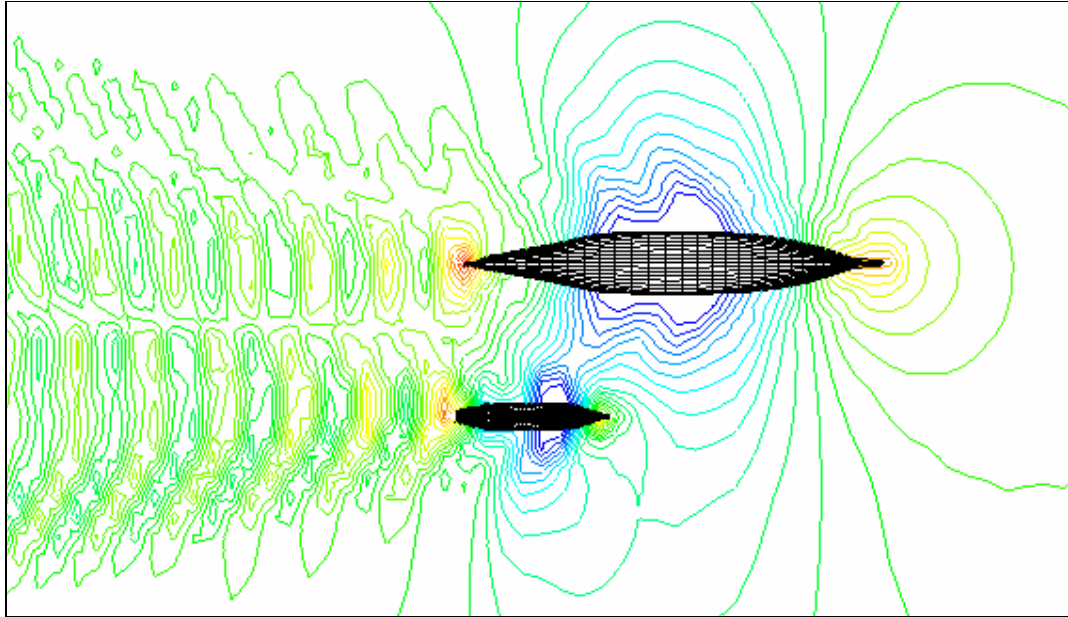


Abb. 23 Längsversatz 0.6 L, Seitenabstand 100 m

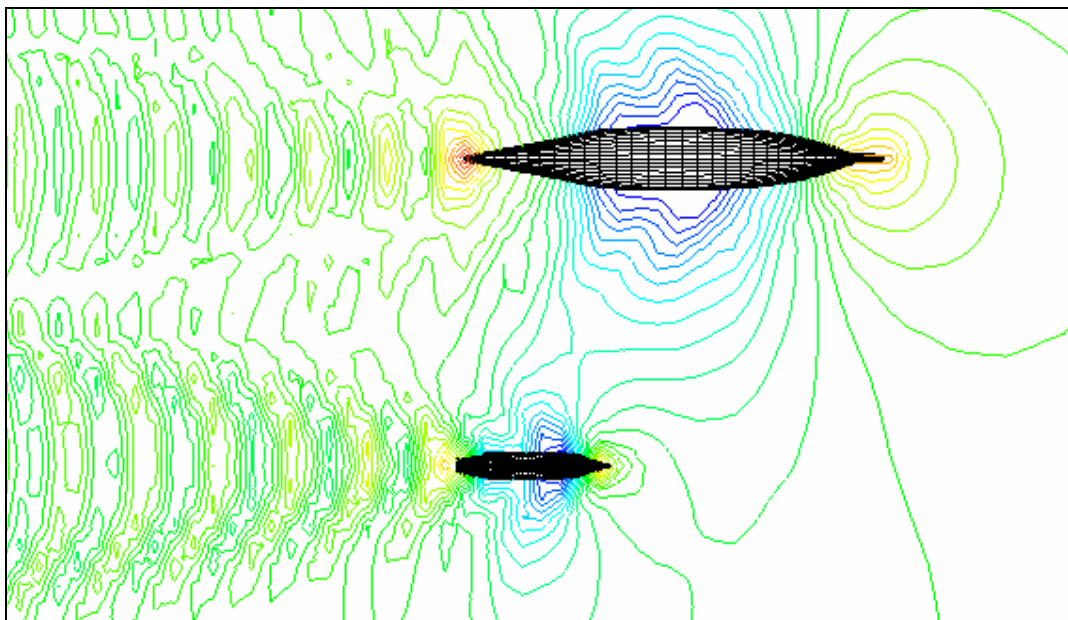


Abb. 24 Längsversatz 0.6 L, Seitenabstand 200 m

ANHANG B

Geschwindigkeitsverlauf der P&O Nedlloyd Finland während des Überholmanövers

Auf Basis des berechneten Längskraftverlaufes von Abbildung 6 wurde eine grobe Schätzung des tatsächlichen Geschwindigkeitsverlaufes des überholten Schiffes P&O Nedlloyd Finland während des Überholmanövers unternommen. Dabei wurde angenommen, dass das überholende Schiff bei 15 Knoten konstant vorbeifährt und, dass die Ausgangsgeschwindigkeit des überholten Schiffes $V=13.5$ Knoten beträgt. Weiter waren Annahmen für die hydrodynamische Masse (4% der eigenen Masse), für das Verhalten des Widerstandes (quadratische Zunahme mit V) und des Schubs (quadratische Abnahme mit V), usw. erforderlich. Abbildung 25 zeigt das Ergebnis der Zeitsimulation, die sich durch Lösung der Impulsgleichung in Längsrichtung ergibt. Die Zeitrechnung beginnt im Augenblick wo der Bug des Überholers das Heck des überholten Schiffes erreicht hat (etwa bei Längsversatz $-0.35 L$) und endet wenn der Überholer vorbei ist (Längsversatz $1 L$). Der Geschwindigkeitsverlauf zeigt einen starken Rückgang der Geschwindigkeit auf etwa 10.5 Knoten und anschließend eine drastische Zunahme auf fast 15 Knoten.

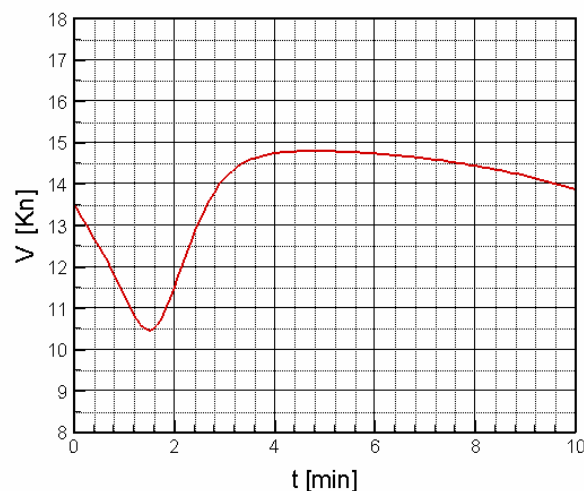


Abb. 25 Geschwindigkeitsverlauf der P&O Nedlloyd Finland

ANHANG C

Simulationsmodell KELVIN

Arbeitsweise

Das Verfahren benutzt die nichtlineare Rankine-Quell-Methode, d.h. die kinematische und dynamische Randbedingung an der Wasseroberfläche werden iterativ an Kollokationspunkten erfüllt, die auf der Wasseroberfläche liegen. Dazu werden Punktquellen oberhalb der Wasseroberfläche angeordnet. Die Strahlungsbedingung wird nach der Verschiebungsmethode erfüllt, indem die Quellen um einen Diskretisierungsabstand hinter und über den Kollokationspunkten an der Wasseroberfläche angeordnet werden.

Die Körper-Randbedingung wird nach der Patch-Methode erfüllt, d.h. es werden Punktquellen innerhalb des Rumpfes jeweils mittig hinter den Oberflächenstücken (Patches) angeordnet. Die Quellstärke wird so bestimmt, daß der Durchfluß durch alle Oberflächenstücke verschwindet. Auch die Integration der Druckkraft über die benetzte Schiffsoberfläche wird nach der Patch-Methode vorgenommen, indem an den vier Ecken jedes Oberflächenstückes das Potential und die Strömungsgeschwindigkeit bestimmt werden und damit der Mittelwert des hydrodynamischen Drucks über das Patch angenähert wird.

Erfahrungen mit anderen Verfahren haben gezeigt, dass Konvergenz und Genauigkeitsprobleme auftreten, wenn sich die Wasserlinie durch die Schwimm Lageänderung und die Wellenbildung gegenüber der Wasserlinie des Schiffes ohne Fahrt voraus stark verändert, wie dies am Bugwulst und im Heckbereich oft vorkommt. Um solche Schwierigkeiten zu vermeiden, wird in KELVIN zu jeder neu iterierten Schwimm Lage und Wellenkontur automatisch eine neue Patch-Einteilung der benetzten Schiffsoberfläche und der Wasseroberfläche generiert. Die Schiffsoberfläche wird dazu nur bis zur aktuellen Wasserlinie diskretisiert. Dadurch wird vermieden, dass Körper- und Oberflächenquellen dicht nebeneinander geraten, wodurch das Gleichungssystem zur Bestimmung der Quellstärken fast singulär würde.

Randbedingung an der Wasseroberfläche

An der Wasseroberfläche wird die dynamische und die kinematische Randbedingung erfüllt. Nach der dynamischen Randbedingung muss der Druck gleich dem Luftdruck sein. Mit der Bernoulli-Gleichung erhält man den folgenden Zusammenhang zwischen der Höhe ζ der Wasseroberfläche und dem Strömungspotential ϕ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - gz + \frac{p}{\rho} &= \text{const} \\ \Rightarrow \quad \zeta &= [U^2 - (\nabla\phi)^2] / 2g \end{aligned} \quad (1)$$

Nach der kinematischen Randbedingung dringt das Wasser nicht durch die Wasseroberfläche, d.h. auf der Wasseroberfläche ist der Strömungsvektor parallel zur Wasseroberfläche:

$$\frac{d}{dt}(\zeta - z) = 0$$

substantielle Ableitung: $d/dt = \partial/\partial t + \nabla\phi\nabla$

stationäre Strömung: $\partial/\partial t = 0$

$$\Rightarrow \quad \nabla\phi\nabla\zeta = \phi_z \quad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich die nichtlineare Randbedingung an der Wasseroberfläche:

$$\begin{aligned} \nabla \phi \nabla \left\{ U^2 - (\nabla \phi)^2 \right\} / 2g - z &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla (\nabla \phi)^2 + g \phi_z &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Der diskretisierte Teil der Wasseroberfläche wird in Vierecke aufgeteilt. Für jeden Iterationsschritt wird $\nabla \phi$ an den Eckpunkten aller Vierecke ausgewertet, wobei deren Höhe und die Lage der Quellpunkte aus dem vorhergehenden Iterationsschritt genommen werden. Vor dem ersten Iterationsschritt wird die Wasseroberfläche in der Höhe $\zeta=0$ angesetzt. Nachdem daraus mit (1) neue Werte ζ berechnet worden sind, werden die Höhen der Viereck-Eckpunkte und die Höhen der Quellen über der Wasseroberfläche entsprechend korrigiert. Die folgenden Berechnungen werden nicht nur einmal für jeden Iterationsschritt ausgeführt, sondern pro Iterationsschritt wiederholt für jede Probe-Quellstärkenänderung und für jedes Oberflächen-Viereck. Nach (1) werden die Höhen der Mittelpunkte der vorderen und hinteren Seite jeden Vierecks bestimmt. Durch Ableiten von (1) nach der Breitenkoordinate y wird weiter die Ableitung $\delta \zeta / \delta y$ an denselben Punkten bestimmt. Durch numerische Differenz zwischen den Werten vorn und hinten an jedem Oberflächenviereck wird so die mittlere Richtung des Normalenvektors \vec{n} für jedes Oberflächen-Viereck berechnet. Die Bedingung, dass der Vektor der Strömungsgeschwindigkeit parallel zur Wasseroberfläche sein muss, führt dann zu der Bedingung:

$$\vec{n} \cdot \nabla \Phi = 0 \quad . \quad (4)$$

Das Residuum, d.h. der sich ergebende Wert der linken Seite dieser Gleichung, wird bestimmt und iterativ zu Null gemacht.

Randbedingung am Spiegelheck

Bei Schiffen mit eintauchendem Spiegel wird keine zusätzliche Bedingung am Spiegel erfüllt. Der einzige Unterschied gegenüber der zuvor beschriebenen Residuen-Berechnung besteht darin, dass an der Kante des Spiegels die Höhe der Wasseroberfläche nicht aus (1) bestimmt wird, sondern gleich der Höhe der Spiegelkante gesetzt wird.

Strahlungsbedingung

Nach der Strahlungsbedingung existiert vor dem Schiff keine Wellenbildung, sondern nur eine nach vorn schnell abklingende wellenförmige Störung.

Randbedingung auf der Schiffsoberfläche

Auf der Schiffsoberfläche gilt die Randbedingung, dass das Wasser nicht durch diese dringen kann, d.h. der Strömungsvektor ist parallel zur Schiffsoberfläche.

$$\vec{n} \cdot \nabla \Phi = 0, \quad \vec{n} : \text{Normalenvektor}$$

Für alle Oberflächenstücke (Patches) auf der benetzten Körperoberfläche wird der Durchfluß pro Zeit, der sich aus der parallelen Anströmung und allen Quellen ergibt, bestimmt und als Residuum angesehen, das zu 0 gemacht werden muss.

Flossen

Das Programm kann (insbesondere kleinere) Flossen berücksichtigen, die z.B. zur Verbesserung der Trimmlage oder zur Dämpfung von Bewegungen im Seegang vorgesehen werden. Auch Ruder können als Flossen behandelt werden. Der Propeller wird jedoch in diesem Programm nicht berücksichtigt. Berechnet werden die nichtviskosen Kräfte, die an Flossen angreifen, d.h. der Auftrieb und der induzierte Widerstand. Dazu werden pauschale Formeln angesetzt, die jedoch im allgemeinen recht genau sind. Die örtliche Geschwindigkeit an der Flosse (genauer: am Flossenmittelpunkt) wird unter Beachtung der Einflüsse des Rumpfes bzw. der Rümpfe und der freien Wasseroberfläche berechnet. Vorausgesetzt wird, dass Flossen an einem Ende spaltfrei mit dem Rumpf verbunden sind, während das andere Ende frei umströmt werden kann. Der Einfluss der Flossenkräfte auf den Widerstand und die Absenkung und Vertrimmung des Schiffes bei Fahrt wird beachtet; die durch Flossen verursachte Verformung der Wasseroberfläche wird dagegen vernachlässigt.

Gegeben werden für jede Flosse der Normalenvektor (mit beliebigem Betrag und Vorzeichen) auf der Flossenfläche, die Flossenlänge (quer zur Anströmrichtung), die Flossenfläche und die Flüssigkeitsdichte.

\vec{n} : der Normalenvektor auf der Flossenfläche

l : Flossenlänge

a : Flossenfläche

ρ : Flüssigkeitsdichte

\vec{v} : die Anströmgeschwindigkeit am Flossenmittelpunkt

Aus den Quellstärken des jeweiligen Iterationsschrittes wird die Anströmgeschwindigkeit am Flossenmittelpunkt berechnet.

Vektor in Spannweitenrichtung: $\vec{s} = \vec{v} \times \vec{n}$ (senkrecht auf \vec{v} und auf \vec{n})

Vektor in Profiltrichtung: $\vec{p} = \vec{n} \times \vec{s}$

Einheitsvektor in Richtung der Auftriebskraft:

$$\vec{l} = \text{sign}(\vec{n} \cdot \vec{v}) \frac{\vec{s} \times \vec{v}}{|\vec{s} \times \vec{v}|}$$

Anstellwinkel: $|\alpha| = \arctan \frac{|\vec{p} \times \vec{v}|}{\vec{p} \cdot \vec{v}}$

Auftriebsbeiwert (leicht abgewandelt nach Manövriertechnisches Handbuch S.77):

$$C_L = 2\pi \frac{\Lambda(\Lambda + 0,7)}{(\Lambda + 1,7)^2} \sin|\alpha| + (\sin|\alpha|)^2 \cos\alpha$$

Seitenverhältnis: $\Lambda = l^2 / a$

Auftriebsvektor: $\vec{L} = \frac{1}{2} \rho (\vec{v} \cdot \vec{v}) a C_L \vec{l}$

Widerstandsbeiwert: $C_D = \frac{C_L^2}{\pi\Lambda} + (\sin|\alpha|)^3$

Die Widerstandskraft zeigt in Richtung \vec{v} und ergibt sich zu

$$\vec{D} = \frac{1}{2} \rho |\vec{v}| \vec{v} a C_D$$

Iterationsverfahren

Es wird ein abgewandeltes Newton-Verfahren angewendet. In jedem Iterationsschritt werden zunächst alle Residuen R für den Grundfall berechnet, d.h. mit den bis dahin gefundenen Quellstärken. Dann werden alle Quellstärken nacheinander um Probe-Quellstärken-änderungen Δq_j vergrößert und wieder die Residuen berechnet. Der Unterschied der Residuen gegenüber dem Grundfall bei einer Probeänderung der Quellstärke j ergibt die j -te Spalte der Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems. Die rechten Seiten sind gleich den Residuen des Grundfalls. Das Gleichungssystem wird nach dem Gauß-Algorithmus gelöst. Die Lösung sind die Faktoren, mit denen die Probe-Quellstärken-änderungen multipliziert werden müssen, um die Quellstärkenänderungen zu erhalten, welche die Residuen bei linearer Beziehung zwischen Residuen und Quellstärkenänderung zu Null machen würden. Da die Beziehung tatsächlich nichtlinear ist, werden im Sinne einer Unterrelaxation kleinere Quellstärkenänderungen vorgenommen. Der gewählte Unterrelaxationsfaktor hängt von der Verkleinerung der Residuen im Vergleich zum vorhergehenden Iterationsschritt ab.

Schwimmlagenänderung

Das Gewicht und sein Längenmoment werden aus der eingegebenen, für nicht fahrendes Schiff gültigen Schwimmlage so berechnet, dass unter der Wirkung des hydrostatischen Druckes $p_{stat} = \rho g z$ das Schiff mit der Masse m und dem Massenschwerpunkt in $(x_G, 0, z_G)$ im Gleichgewicht ist. (S_x, S_y, S_z) ist der in den Körper hineinzeigende Einheits-Normalenvektor multipliziert mit der Fläche eines Körperdreiecks (Halb-Patches). Dann ist

$$\sum p_{stat} S_z - gm = 0$$

$$\sum p_{stat} (z S_x - x S_z) + gm x_G = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen werden im ersten Iterationsschritt gm und $gm x_G$ bestimmt. z_G (z-Koordinate des Massenschwerpunktes; siehe Project-View) wird eingelesen. Außerdem wird das Höhenmoment des Auftriebs

$$\sum p_{stat} \frac{1}{2} z S_z = gm z_B$$

bestimmt. Bei Änderungen des Tiefgangs um ΔT und des Trimmwinkels um $\Delta \theta$ werden x_G und z_G (im Wasserliniensystem) geändert:

$$\Delta x_G = z_G \Delta \theta$$

$$\Delta z_G = -\Delta T - x_G \Delta \theta.$$

In jedem Iterationsschritt werden aus dem Druck

$$p = p_{stat} - \frac{1}{2} \rho \vec{u}^2 s$$

und den Gewichtsgrößen die resultierende Vertikalkraft und das resultierende Trimmmoment bestimmt:

$$F_z = \sum p S_z - gm$$

$$M_y = \sum p (z S_x - x S_z) + gm x_G.$$

Beide Größen sollen durch die Schwimmlageänderungen ΔT und $\Delta \theta$ zu Null gemacht werden. Es gilt:

$$\Delta F_z = \rho g A_w \Delta T + \rho g A_w x_w \Delta \theta$$

$$\Delta M_y = -\rho g A_w x_w \Delta T - \rho g I_L \Delta \theta + gm (z_G - z_B) \Delta \theta.$$

Die letzten zwei Gleichungen können wie folgt zusammengefasst werden:

$$\begin{pmatrix} \Delta F_z \\ \Delta M_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho g A_w & \rho g A_w x_w \\ -\rho g A_w x_w & -\rho g I_L + gm(z_G - z_B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta \theta \end{pmatrix}.$$

Aus $F_z + \Delta F_z = 0$ und $M_y + \Delta M_y = 0$ folgt dann:

$$\begin{pmatrix} \rho g A_w & \rho g A_w x_w \\ -\rho g A_w x_w & -\rho g I_L + gm(z_G - z_B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_z \\ -M_y \end{pmatrix}.$$

Nach der Kramer'schen Regel ergibt sich die Lösung

$$\Delta T = \frac{\begin{vmatrix} -F_z & \rho g A_w x_w \\ -M_y & -\rho g I_L + gm(z_G - z_B) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho g A_w & \rho g A_w x_w \\ -\rho g A_w x_w & -\rho g I_L + gm(z_G - z_B) \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad \Delta \theta = \frac{\begin{vmatrix} \rho g A_w & -F_z \\ -\rho g A_w x_w & -M_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho g A_w & \rho g A_w x_w \\ -\rho g A_w x_w & -\rho g I_L + gm(z_G - z_B) \end{vmatrix}}.$$